ΘΕΩΡΗΜΑ (Sylow)

Πχ

$|\Sigma_3|=6$, $2,3/6$

$|<f>|=3$, $|<g>|=2$

$|\Sigma_4|=24$, $|A_4|=12$

$1, 2, 3, 4, 6, 12 / 12$

$<(1,2)>$

$<(1,2,3)>$, $|\{(1,2)(3,4), (1,3)(2,4), (1,4)(2,3), e\}|=4$

Αλλά, $\nexists Y \leq A_4$ με $|Y|=6=2\cdot 3$

ΟΡΙΣΜΟΣ:

Έστω $Y \leq O$, τότε ο κανονικοποιητής ορίζεται από $N_O(Y)$ με $N_O(Y)=\{a / aYa^{-1}=Y, \alpha \in O\}$, $N_O(Y) \leq O$, $Y \leq N_O(Y)$ και $Y \triangleleft N_O(Y)$ και είναι η μέγιστη υποομάδα της O με αυτή την ιδιότητα

$C_O(\alpha)=\{b / ba=ab \Leftrightarrow bab^{-1}=a\}$

Είχαμε δ.ο:

Ο αριθμός των διακεκριμένων συζυγών υποομάδων της O ως προς την Y δίνεται από το δείκτη $[O:N_O(Y)]$

Γνωρίζουμε

$Y \leq N_O(Y) \leq O$ και επίσης $[O:Y]=[O:N_O(Y)]\,[N_O(Y):Y]$

Δηλ. ο αριθμός των συζυγών της Y διαιρεί το δείκτη

ΠΡΩΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ SYLOW

$|O|<\infty$ και p: πρώτος φυσικός ώστε $p/|O|$ τότε

1) Αν $p^k / |O|$ τότε $(\exists Y \leq O): |Y|=p^k$

Παρατήρηση:

$|O|<\infty \Rightarrow |O| = p_1^{k_1} \cdots p_l^{k_l}$, $p_1<p_2<\ldots<p_l$ πρώτοι $k_i \geq 1$

ΟΡΙΣΜΟΣ:

Έστω $|O|=p_1^{k_1}\cdots p_e^{k_e}$. Τότε κάθε υποομάδα τάξης $p_i^{k_i}$ θα καλείται p_i-υποομάδα του Sylow στην O

ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ: Υπάρχουν; αν ΝΑΙ πόσες είναι; πως σχετίζονται;
Ασφαλώς και υπάρχουν (από το πρώτο Θεώρημα Sylow)

2) Έστω Π p-υποομάδα του Sylow. Αν η $|Y|=p^k$ τότε υπάρχει $a\in O$: $Y\leq a\Pi a^{-1}$. Δηλ. η $Y\leq$ μίας συζυγούς

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:

Αν η Y έχει μέγιστη τάξη τότε θα είναι p-Sylow και θα είναι συζυγής με κάποια άλλη. Άρα, οι p-Sylow υποομάδες είναι συζυγείς μεταξύ τους διότι $|Y|=p_i^{k_i}$ και $|a\Pi a^{-1}|=p_i^{k_i}$ με $Y\leq a\Pi a^{-1}\Rightarrow Y=a\Pi a^{-1}$

Το πόσες είναι και πως σχετίζονται μας το απαντάει τα θεωρήματα:

ΔΕΥΤΕΡΟ ΘΕΩΡΗΜΑ (SYLOW):

Μία p-Sylow υποομάδα της O κανονική $\Leftrightarrow$ είναι μοναδική p-Sylow.

ΤΡΙΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ (SYLOW)

Έστω Π, p-Sylow υποομάδα της O. Ο αριθμός των p-Sylow δίνεται από το δείκτη $[O:N_O(\Pi)]$ και ο αριθμός αυτός έχει μορφή $1+\lambda p$.

Π.Χ

Έστω $O=A_4\Rightarrow|O|=|A_4|=2^2 3\Rightarrow\exists$ 2 (δύο) και 3 (τρία) υποομάδες
άρα $\exists$ $|Y|=2$ και $|\Pi|=3$

Για την $Y'=\{(1,2)(3,4),(1,3)(2,4),(1,4)(2,3),e\}$

Αφού $A_4 = Y' \cup \{(\alpha,\beta,\gamma) \mid \alpha,\beta,\gamma \in \{1,2,3,4\} \quad \alpha\neq\beta\neq\gamma\}$

Η Y' είναι μοναδική τάξης 4

Η Y' είναι 2-Sylow $\Rightarrow \exists\ [A_4 : N_{A_4}(Y')] = 1+2\lambda$ όμως

$[A_4 : Y] = [A_4 : N_{A_4}(Y)]\cdot[N_{A_4}(Y):Y]$

Ο αριθμός $1+2\lambda / 3 \Rightarrow \begin{cases} \lambda=0 \Rightarrow \text{κανονική} \\ \lambda=1 \quad \text{έχει } 2,3\text{-Sylow} \end{cases}$

$|\Pi|=3$ είναι 3-Sylow

$[A_4:\Pi] = [A_4 : N_{A_4}(\Pi)]\cdot[N_{A_4}(\Pi):\Pi]$

$\overset{\shortparallel}{4}$ Άρα ο αριθμός $[A_4 : N_{A_4}(\Pi)] = 1+3\lambda / 4$

$\lambda=0 \Rightarrow$ Μοναδική $<(\alpha,\beta,\gamma)>$ για καθε $\alpha,\beta,\gamma \Rightarrow$ όχι μοναδική

$\lambda=1 \Rightarrow 4$ $\Rightarrow$ είναι 4

$(1,2,3),(1,2,4),(1,3,4),(2,3,4)$

ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω O ομάδα με $|O|=p\cdot q$, p,q πρώτοι $p<q$

Αν $p \nmid q-1$ τότε O κυκλική

ΠΧ

$|O| = 35 = 7\cdot 5 \Rightarrow O$ κυκλική

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Απο τα Θ. Sylow $\exists$ p υποομάδα Π και q υποομάδα Y

Ο αριθμός των p υποομάδων είναι $[O:N_O(\Pi)] = 1+\lambda p$

και $1+\lambda p \mid [O:\Pi] = [O:N_O(\Pi)][N_O(\Pi):\Pi] = q \Rightarrow 1+\lambda p / q$

$\overset{q\text{ πρώτ}}{\Longrightarrow} \begin{cases} 1+\lambda p = 1 \\ 1+\lambda p = q \Rightarrow \lambda p = q-1 \quad \text{Αντίθετο στην υπόθεση} \end{cases}$

Άρα, υπάρχει μία κανονική p-Sylow υποομάδα

Αντίστροφα

Το ίδιο για $Y \Rightarrow Y$ κανονική

Επίσης $Y\cap\Pi=\{e\}$ και Y,Π κανονικές της O και $Y\Pi\leq O$ γιατί μία από τις 2 κανονική και $|Y|\cdot|\Pi|=|O| \Rightarrow O=Y\Pi\simeq Y\times\Pi\simeq \mathbb{Z}_p\times\mathbb{Z}_q\simeq\mathbb{Z}_{pq}$

Πχ

1) $|\Sigma_3|=6=2\cdot 3$ $\quad 2/3-1$ και η Σ_3 δεν είναι κυκλική

2) $|O|=6=2\cdot 3 \Rightarrow \exists\, |Y|=3$ και $|\Pi|=2$
ενώ $[O:Y]=2 \Rightarrow Y\trianglelefteq O \Rightarrow Y\Pi\leq O \Rightarrow Y\cap\Pi=\{e\}\Rightarrow O=Y\Pi$.
Έστω $Y=\langle f\rangle$ και $\Pi=\langle g\rangle$ όπως $Y\trianglelefteq O \Rightarrow gfg^{-1}\in Y \Rightarrow$
$\Rightarrow Y=\langle f\rangle \ni gfg^{-1} \Rightarrow gfg^{-1}=\begin{cases} f \Rightarrow O \text{ κυκλική} \\ f^2 \Rightarrow O\simeq\Sigma_3\end{cases}$

Συνεπώς, $O\simeq\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_2\simeq\mathbb{Z}_6$ ή $O\simeq\Sigma_3$

Πχ

$|O|=10=2\cdot 5 \rightarrow 2|5-1 \Rightarrow \exists |Y|=5$ και $|\Pi|=2 \Rightarrow$
$\Rightarrow Y$ είναι δείκτης 2. Άρα $Y\trianglelefteq O$
Έστω $Y=\langle f\rangle$, $\Pi=\langle g\rangle$ τότε
$gfg^{-1}\in\langle f\rangle=Y \rightarrow gfg^{-1}=\begin{cases} f \Rightarrow O \text{ αβελιανή} \Rightarrow O\simeq\mathbb{Z}_{10} \\ \cancel{f^2} \\ \cancel{f^3} \\ f^4 \Rightarrow gfg^{-1}=f^4=f^{-1}\Rightarrow O\simeq D_5\end{cases}$

- $gfg^{-1}=f^2 \Rightarrow f=gf^2g^{-1}=(gfg^{-1})^2=(f^2)^2=f^4 \Rightarrow f=f^4 \Rightarrow$
$\Rightarrow f^3=1$ Αδύνατο $o(f)=5$
- $gfg^{-1}=f^3 \Rightarrow f=gf^3g^{-1}=(gfg^{-1})^3=(f^3)^3=f^9 \Rightarrow f=f^9 \Rightarrow$
$\Rightarrow f^8=1 \Rightarrow o(f)/8 \Rightarrow 5/8$ άτοπο

Πχ

Να βρεθούν όλες οι μη ισόμορφες τάξης 30
$|O|=30=2\cdot 3\cdot 5 \Rightarrow$ έχει υποομάδες $2,3,5$
Έστω $|Y|=2$, $|X|=3$, $|\Pi|=5$
Για τις 5-Sylow θα είναι:

$1+5\lambda = [O:N_O(\Pi)] \mid 6 = [O:\Pi]$
2 περιπτώσεις
$\lambda=0 \Rightarrow \Pi \triangleleft O$
$\lambda=1 \Rightarrow \exists$ 6 5-Sylow $\Rightarrow$ Αυτές είναι όλες κυκλικές τάξης πρώτου $=5$. Το μόνο κοινό που έχω λόγω της τάξης είναι το ταυτοτικό. Άρα, έχω $4\cdot 6+1$ στοιχεία
το κοινό
άρα 25 στοιχεία
Για των 3-Sylow θα είναι
$1+3\lambda = [O:N_O(X)] / 10$
2 περιπτώσεις
$\lambda=0 \Rightarrow$ μοναδική 3-Sylow $\Rightarrow$ κανονική
$\lambda=3 \Rightarrow$ δέκα 3-Sylow

ΕΡΩΤΗΜΑ
Μπορεί η O να έχει 6 5-Sylow και 10 3-Sylow υποομάδες;

25 στοιχεία + 20 στοιχεία $=45>30$
Άρα, δεν μπορούμε να έχουμε πολλές Sylow και στις 2
Έτσι, πηγαίνουμε 2 περιπτώσεις:
α) Μοναδική 5-Sylow
β) -׀׀- 3-Sylow

α) $\Pi \triangleleft O \Rightarrow X\Pi \leq O \Rightarrow |X\Pi|=15 \Rightarrow X\Pi \triangleleft O \sim [O:X\Pi]=2$
$15=3\cdot 5$ και $3 \nmid 5-1$ άρα $X\Pi$ κυκλική $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ Η O έχει στοιχείο τάξης 15 $(o(a)=15)$
Έστω Y μία 2-Sylow με $Y=\langle b\rangle$
$bab=a^k$, $1\leq k\leq 14$, $k\in\mathbb{Z}$ (πολλές περιπτώσεις)
$o(bab)=o(a)=15$
$o(a^k)=\frac{15}{(k,15)}=15 \Rightarrow (k,15)=1 \Rightarrow k=1,2,4,7,8,11,13,14$
(επαλήθ. $\varphi(15)=\varphi(3)\varphi(5)=8$)

Ξανά είναι αρκετές περιπτώσεις άρα τις μειώνουμε
$bab = a^k \Rightarrow a = ba^kb \Rightarrow (bab)^k = (a^k)^k = a^{k^2} \Rightarrow$
$\Rightarrow a^{k^2-1} = 1 \Rightarrow o(a) \mid k^2-1 \Rightarrow 15 \mid k^2-1$, (απορ. 2, 7, 8, 13)

$k=1 \Rightarrow O$ αβελιανή $\Rightarrow O \simeq \mathbb{Z}_{30}$
$k=4$
$k=11$
$k=14 \Rightarrow bab = a^{14} = a^{-1} \Rightarrow O \simeq D_{15}$

$\left.\begin{matrix} \\ \end{matrix}\right\}$ οι απορρέουσες περιπτώσεις

και εξετάζουμε τις 2 ενδιάμεσες περιπτώσεις
Έτσι, $O \simeq \mathbb{Z}_5 \times O'$, O', O'' όχι αβελιανές
$O \simeq \mathbb{Z}_3 \times O''$

με $|O'| = 6 \Rightarrow O' \simeq \Sigma_3$
$|O''| = 10 \Rightarrow O'' \simeq D_5$